(2) 塑性極限解析

完全弾塑性材料から構成される骨組や連続体に外力が作用すると，骨組や連続体はあるレベル以上の荷重を負担できない。この荷重レベルを求める解析を塑性極限解析と呼ぶ。塑性極限解析に関する 3 つの条件として，釣合条件，機構条件，降伏条件の 3 条件が存在する。この 3 条件のどれを満足するかにより，図 1-20 に示すような 3 つの定理が成立する。

上界定理：荷重が比例載荷される骨組を考えるとき，釣合条件と機構条件を満たす曲げモーメント分布が荷重係数 Λ_U に対して存在するならば，その荷重係数 Λ_U は，$\Lambda_U \geqq \Lambda_T$（真の値）を満たす。

下界定理：荷重が比例載荷される骨組を考えるとき，釣合条件と降伏条件を満たす曲げモーメント分布が荷重係数 Λ_L に対して存在するならば，その荷重係数 Λ_L は，$\Lambda_L \leqq \Lambda_T$ を満たす。

解の唯一性定理：荷重が比例載荷される骨組について，釣合条件，降伏条件，機構条件のすべてを満たす曲げモーメント分布が荷重係数 Λ_C に対して存在するならば，$\Lambda_C = \Lambda_T$ であり，その他のいかなる正の荷重係数に対しても，この 3 条件をすべて満たす曲げモーメント分布は存在しない。

これらの定理のなかで，上界定理について考えてみる。図 1-21(a)のような，水平，鉛直方向の比例漸増荷重を受ける 1 層 1 スパンラーメンを考える。梁と柱の全塑性モーメントは $2M_P$，M_P である。Λ は荷重係数を表す。この骨組には，いくつかの崩壊機構が考えられ，代表的なものとして，図 1-21(b)の層機構，図 1-21(c)の梁機構，図 1-21(d)の複合機構が存在する。

図 1-21(b)の層機構について仮想仕事速度式を書くと（層方向の釣合式に対応），崩壊荷重係数が $\Lambda_U = 2M_P/(PL)$ と求められる。次に，図 1-21(c)の梁機構について仮想仕事速度式を書くと，$\Lambda_U = 6M_P/(PL)$ と求められる。さらに，図 1-21(d)の複合機構について仮想仕事速度式を書くと，$\Lambda_U = (8/3)M_P/(PL)$ と求められる。それぞれの機構について，対応する曲げモーメント図を釣合式を用いて求めると図 1-22 のようになる。

上界定理によると，これらの荷重係数は，いずれも真の崩壊荷重係数と等しいか大きな値となる。図 1-21 から，これらのなかで最小の荷重係数を与える層機構は，すべての降伏条件をも満たしていることがわかる。したがって，解の唯一性定理より，この層機構に対する崩壊荷重係数が真の値となる。梁機構においては，両柱脚の曲げモーメント和 $M_L+M_R = 12M_P$ が，降伏条件から導かれる条件 $-2M_P \leqq M_L+M_R \leqq 2M_P$ を満足せず，複合機構においては，左側柱の柱頭と梁の左端の降伏条件を満たしていない。

次に下界定理の適用例について考える。図 1-23 のような 1 層 1 スパンラーメンに水平力が比例的に作用する場合を考える。このとき，図 1-23 の左の図のように，水平方向の力の釣合いと節点回りのモーメントの釣合い，および降伏条件を満足する曲げモーメント分布を考える。この場合には崩壊機構を形成していないため機構条件は満足していない。一方，図 1-23 の右の図は，釣合条件，降伏条件，機構条件の 3 条件を満足する曲げモーメント分布を示しており，この場合には唯一性定理より正解の荷重係数を与える。図 1-23 より，本例は下界定理を正しく表しているといえる。

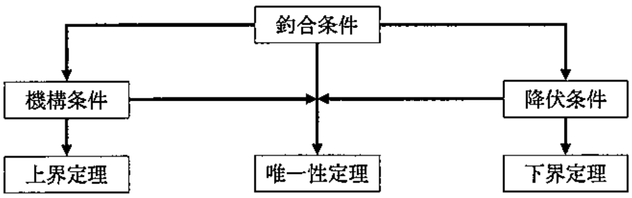

図 1-20　釣合条件，降伏条件，機構条件と上界定理，下界定理，唯一性定理との関係

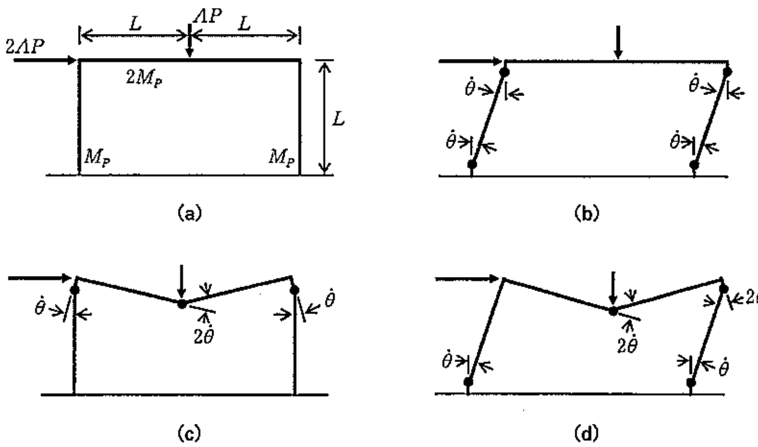

図 1-21　(a)水平，鉛直方向荷重を受ける１層１スパンラーメン，(b)層機構，(c)梁機構，(d)複合機構

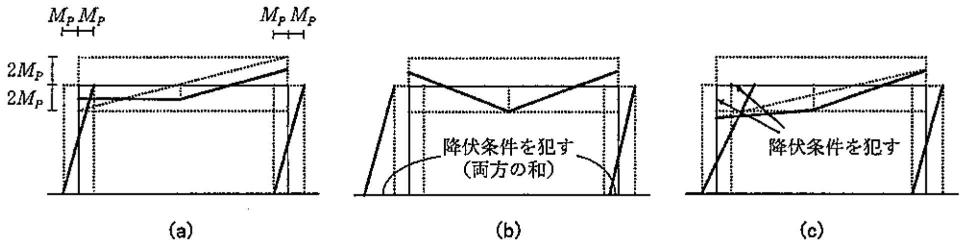

図 1-22　曲げモーメント分布：(a)層機構，(b)梁機構，(c)複合機構

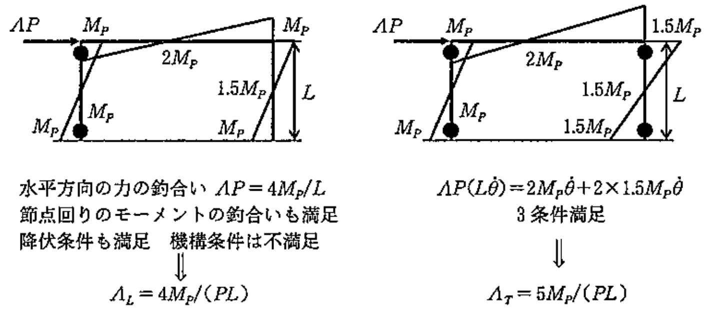

図 1-23　下界定理による下界の荷重係数と正解